www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES
OPTION MATHEMATIQUES

MAI 1990

TROISIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
(Durée : 2 heures)

Il est expressément demandé aux candidats de présenter et de rédiger leurs démonstrations avec le plus grand soin. Les candidats pourront (éventuellement) admettre les résultats d'une question à condition de le mentionner explicitement.

Notations :

. Dans tout le problème k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1, et $\mathcal{K}$ représente l'ensemble des k premiers entiers : $\mathcal{K} = (1,\ldots,k)$.

. La norme du maximum sur $\mathbb{R}^k$, notée $|\ |_\infty$ est définie par :

$$u = (u_1,\ldots,u_k) \in \mathbb{R}^k \longrightarrow |u|_\infty = \sup_{i\in\mathcal{K}} |u_i|$$

. Si $u = (u_i)_{i\in\mathcal{K}}$ et $v = (v_i)_{i\in\mathcal{K}}$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^k$, la relation $u \leqslant v$ signifie :

$$\forall\, i \in \mathcal{K},\quad u_i \leqslant v_i .$$

. Le vecteur nul de $\mathbb{R}^k$, appelé aussi origine de $\mathbb{R}^k$, est noté 0. La relation $0 \leqslant u$ signifie donc que toutes les composantes $u_1,\ldots,u_k$ de $u = (u_i)_{i\in\mathcal{K}}$ sont positives ou nulles dans $\mathbb{R}$.

. On note $\mathcal{M}$ l'algèbre des matrices carrées (k,k) à coefficients réels. Si $B \in \mathcal{M}$, $B = (b_{i,j})$ signifie que le réel $b_{i,j}$ est l'élément de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne ($i\in\mathcal{K}, j\in\mathcal{K}$) de la matrice B.

. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}$, $A \leqslant B$ signifie :

$$\forall\, (i,j) \in \mathcal{K}^2 \quad a_{i,j} \leqslant b_{i,j}$$

. La matrice identité de l'algèbre $\mathcal{M}$ est désignée par I et la matrice nulle est désignée par 0. Pour $B \in \mathcal{M}$, la relation $0 \leqslant B$ signifie donc que tous les coefficients de B sont positifs ou nuls dans $\mathbb{R}$.

. Enfin on rappelle que sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

. Dans tout le problème E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle semi-norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$

$$\forall\, x,y \in E,\quad N(x+y) \leqslant N(x)+N(y)$$

1 - Prouver que toute semi-norme N sur E prend nécessairement des valeurs positives ou nulles, que son noyau $K = (x \in E \,/\, N(x) = 0)$ est un sous-espace vectoriel de E, et que : $\forall\, x \in E,\ \forall\, v \in K,\ N(x+v) = N(x)$.

.../...

. Dans la suite du problème, on suppose qu'il existe une application p :

$$p : E \longrightarrow \mathbb{R}^k$$
$$x \longmapsto p(x) = (p_1(x), \ldots, p_k(x))$$

vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$$
$$\forall x, y \in E, \quad p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) \text{ (ordre partiel sur } \mathbb{R}^k)$$
$$\forall x \in E, \quad p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

On dit que cette application p est une norme vectorielle de poids k sur E.

2 - Prouver que les applications $(p_i)_{i \in \mathcal{K}}$ définissent des semi-normes sur E dont les noyaux $(K_i)_{i \in \mathcal{K}}$ sont tels que : $\bigcap_{i=1}^{k} K_i = \{0\}$

a) Prouver que $\forall x \in E$, on a : $0 \leqslant p(x)$ (dans $\mathbb{R}^k$).

b) Réciproquement, prouver que la donnée de k semi-normes $(p_i)_{i \in \mathcal{K}}$ dont les noyaux $(K_i)_{i \in \mathcal{K}}$ sont tels que $\bigcap_{i=1}^{k} K_i = \{0\}$, permet de définir une norme vectorielle de poids k sur E.

3 - On définit l'application ψ de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \psi(x) = \operatorname{Max}_{i \in \mathcal{K}} p_i(x)$$

Prouver que ψ définit sur E une norme vectorielle de poids 1.

. Dans toute la suite du problème la topologie considérée sur E sera celle définie par ψ.

4 - Pour $v \in \mathbb{R}^k$ tel que $0 < v$ (toutes les composantes de v sont strictement positives), on pose : $U_v = \{x \in E \ / \ p(x) \leqslant v\}$

Soit $\mathcal{B}$ une boule ouverte de E, de centre l'origine de E. Montrer qu'il existe un $v \in \mathbb{R}^k$, $0 < v$ tel que : $U_v \subset \mathcal{B}$.

5 - On propose l'étude de deux exemples d'espaces E.

a) On prend $E = \mathbb{R}^k$; prouver que l'application qui à $x = (x_1, \ldots, x_k)$ associe $p(x) = (|x_1|, \ldots, |x_k|)$ est une norme vectorielle de poids k.

b) Soit C l'espace vectoriel des fonctions continues sur [0,1] et à valeurs réelles. On prend $E = C \times C$ et pour tout élément $f = (f_1, f_2)$ de E et on pose :

$$p_1(f) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f_1(t)| \qquad p_2(f) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f_2(t)|$$

Prouver qu'on obtient ainsi une norme vectorielle de poids 2 sur E. On considère la norme ψ associée à (p_1, p_2) comme dans la question 5.

E est-il complet pour cette norme?

.../...

6 - Si C est une matrice carrée à coefficients réels ou complexes, on appelle rayon spectral $\rho(C)$ le module maximum des valeurs propres (complexes) de C.

a) Soit $A \in \mathcal{M}$ tel que $\rho(A) < 1$. Prouver alors que I-A est inversible et que :

$$(I-A)^{-1} = \lim_{p \to +\infty} \sum_{h=0}^{p} A^h$$

(la convergence étant relative à la topologie naturelle d'espace vectoriel normé de $\mathcal{M}$)

b) Soit $A \in \mathcal{M}$ tel que $\rho(A) < 1$ et $0 \leqslant A$ (au sens défini au début du problème). Montrer que $0 \leqslant (I-A)^{-1}$.

On définit sur $\mathcal{M}$ la norme suivante, notée $\| \ \|$:

$$A \in \mathcal{M} \longmapsto \|A\| = \sup_{\substack{u \in \mathbb{R}^k \\ u \neq 0}} \frac{|Au|_\infty}{|u|_\infty}.$$

7 - Prouver que : $\forall\, A=(a_{i,j}) \in \mathcal{M}$, $\|A\| = \operatorname{Max}_{i \in K} \sum_{j=1}^{k} |a_{i,j}|$

. Soit $M \in \mathcal{M}$ tel que $0 \leqslant M$ et $\rho(M) < 1$. Soit F une application de E dans E telle que :

(*) $$\forall\, x,y \in E \quad p[F(x) - F(y)] \leqslant M\, p(x-y)$$

On dit alors que F est contractante sur E relativement à p.
On appelle point fixe de F tout élément x de E vérifiant $F(x) = x$.

8 - En utilisant l'inégalité (*), prouver que :

$$\forall\, x,y \in E, \quad \psi(F(x)-F(y)) \leqslant \|M\| \psi(x-y)$$

Exhiber un contre-exemple montrant que cette inégalité n'implique pas nécessairement que F soit contractante relativement à la norme ψ sur E.

9-a) Prouver que si F possède un point fixe dans E alors il est unique.

b) Soit $x^{(0)}$ un point quelconque de E, on définit une suite $(x^{(r)})$ sur E par la relation de récurrence :

$$x^{(r+1)} = F(x^{(r)}),\ r \in \mathbb{N}.$$

. Prouver que $(x^{(r)})$ est une suite de Cauchy de E.

.../...

c) Prouver que si E est complet, alors F admet dans E un unique point fixe x et :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ p(x-x^{(r)}) \leqslant M^r(I-M)^{-1}p(x^{(1)}-x^{(0)})$$

d) En déduire une méthode, dite des approximations successives, permettant de calculer une approximation du point fixe de F. Commenter.

10 - En utilisant la norme sur $\mathbb{R}^2$ définie dans la question 5a, prouver que le système d'équations non linéaires suivant admet une solution unique $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, calculable par la méthode des approximations successives, définie à la question précédente.

$$\begin{cases} x_1 = 0,4 \sin x_1 + 0,2 \cos x_2 \\ x_2 = 0,8 \cos x_1 + 0,4 \sin x_2 \end{cases}$$

On considère sur cet exemple la méthode des approximations successives en partant de :

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{bmatrix}$$

Donner une majoration de $|x-x^{(1)}|_\infty$ et de $|x-x^{(4)}|_\infty$.

11 - En procédant comme dans la question 10 prouver qu'il existe un couple unique (g_1, g_2) de fonctions continues sur [0,1] à valeurs réelles, telles que, pour tout t de [0,1] :

$$g_1(t) = \int_0^t [0,4 \sin g_1(\theta) + 0,2 \cos g_2(\theta)]\, d\theta$$

$$g_2(t) = \int_0^t [0,8 \sin g_1(\theta) + 0,4 \sin g_2(\theta)]\, d\theta$$

* *
*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail